**Математика, 7-8 классы**

**Принцип Дирихле**

В этой статье мы рассмотрим один из методов решения задач, который не требует глубоких знаний школьного курса математики. Как правило, к этому методу прибегают, когда решают, так называемые «олимпиадные задачи».

Принцип Дирихле выражает соотношение между двумя множествами. Одна из популярных формулировок этого принципа звучит так: «Если в 7 клетках сидят 8 кроликов, то в некоторой клетке сидят не менее двух кроликов». В общем виде в терминах «клетки» - «кролики» принцип Дирихле можно сформулировать так: «если в n клетках сидит m кроликов, причем m > n, то хотя бы в одной клетке сидят, по крайней мере, два кролика»

Приведем еще несколько формулировок этого принципа:

1. Если m>n, то при отнесении каждого из m предметов к одному из n классов хотя бы в один класс попадет не менее двух предметов.

2. Если множество, состоящее из nk+1 элементов, разбить на k непересекающихся классов, то хотя бы в одном классе найдётся не менее чем n+1 элементов.

3. Если множество, состоящее из n элементов разбить на k непересекающихся классов (n>k), то найдется хотя бы один класс, в котором содержатся k не менее n/k элементов.

Самая популярная задача на прямое применение принципа Дирихле такова: на Земле живет 3 млрд. человек, у каждого на голове – не более миллиона волос. Нужно доказать, что обязательно найдутся два человека с одинаковым числом волос. Приняв в качестве «классов» возможное число волос от 0 до 1 000 000 (всего 1 000 001 класс), а в качестве «предметов» население Земли (всего 3 000 000 000 предметов) и применив принцип Дирихле, получим, что обязательно найдутся, по крайней мере, 2 000 людей, имеющих одинаковое число волос на голове.

Принцип назван в честь немецкого математика П.Г.Л. Дирихле (1805 – 1859), который применял его при доказательстве арифметических утверждений.

Рассмотрим примеры задач для решения, которых необходимо применить этот принцип, выбирая каждый раз подходящих «кроликов» и строя соответствующие «клетки».

**Пример 1**. Доказать, что среди шести любых чисел найдутся два, разность которых делится на пять.

Решение.

1) Примем числа за «кроликов». Так как чисел 6, то «клеток» должно быть меньше.

2) В условии речь идет о делении на 5. По теореме о делении с остатком, при делении на пять может быть один из пяти остатков: 0, 1, 2, 3, 4. Поэтому, в качестве «клеток» примем остатки от деления на 5.

3) 6>5, тогда по принципу Дирихле, найдется «клетка» (остаток), в которой будут сидеть по крайней мере 2 «кролика» (числа). То есть, по крайней мере 2 числа будут иметь одинаковые остатки от деления на 5.

4) Рассмотрим разность этих чисел (дающих при делении на 5 одинаковые остатки) а = 5m+q и b=5n+q: (5m+q) – (5n + q) = 5(m – n). Таким образом разность чисел, имеющих одинаковый остаток при делении на 5 будет делится на 5.

Следовательно, среди любых шести чисел всегда можно найти два, разность которых делится на пять.

**Пример 2.** В классе 30 учеников. Саша Иванов в диктанте сделал 13 ошибок, а остальные – меньше. Докажите что, по крайней мере 3 ученика сделали ошибок поровну (может быть по 0 ошибок)

Решение.

1) В качестве «кроликов» будем рассматривать учеников. Под «клетками» будем подразумевать – число сделанных ошибок.

2) В клетку 0 «посадим» всех, кто не сделал ни одной ошибки, в клетку 1 – тех, у кого одна ошибка, в клетку 2 – две… и так до клетки 13, куда попал только Саша Иванов.

3) Теперь применим принцип Дирихле. Докажем утверждение задачи от противного. Предположим, что никакие три ученика не сделали по одинаковому числу ошибок, т.е. в каждую из «клеток» 0, 1, 2, …,12 попало меньше трех школьников. Тогда в каждой из них два человека или меньше, а всего в этих «клетках» не более 2\*12=26 человек. Добавив Сашу Иванова, все равно не наберем 30 ребят. Противоречие.

Следовательно, утверждение задачи верно, по крайней мере, трое учеников сделали поровну ошибок.

**Пример 3.** В розыгрыше кубка по футболу (в один круг) участвуют 30 команд. Доказать, что в любой момент найдутся две команды, сыгравшие одинаковое число игр.

Решение.

Рассмотрим два случая.

1) Хотя бы одна из 30 команд не сыграла еще ни одной игры.

1. Каждая команда сыграла хотя бы одну игру.

Докажем утверждение для первого случая.

Так как хотя бы одна из 30 команд не сыграла еще ни одной игры, то число игр у любой команды не более 28, то есть возможное число игр у каждой из команд может быть: 0, 1, 2, …, 28 (всего 29 чисел), а команд по условию 30. Тогда по принципу Дирихле, приняв в качестве «клеток» числа проведенных игр (всего 29 «классов»), а в качестве «кроликов» - команды (всего 30 «кроликов»), получим, что хотя бы 2 команды будут соответствовать одному числу проведенных игр, а значит, хотя бы 2 команды сыграли одинаковое число игр.

Докажем утверждение для второго случая.

Так как каждая из 30 команд сыграла хотя бы одну игру, то число проведенных игр может принимать значения: 1, 2, …, 29 (всего 29), а команд 30, тогда по принципу Дирихле найдутся хотя бы 2 команды, сыгравшие одинаковое число игр.

**Пример 4**. В квадрат со стороной 1 м бросили произвольным образом 51 точку. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть квадратиком со стороной 0,2 м.

Решение.

1) Разобьём квадрат на 25 равных квадратиков со стороной 0,2м («клетки»).

2) Докажем, что в каком-то из них находятся, по крайней мере, 3 точки («кролики»). Применим Принцип Дирихле: если бы в каждом квадратике (внутри или на сторонах) было не больше 2-х точек, то всего их было бы не больше 50 (2\*25=50). Следовательно, по крайней мере три из них можно накрыть квадратиком со стороной 0,2 м.

**Пример 5.** Кот Базилио пообещал Буратино открыть великую тайну, если он составит чудесный квадрат 6×6 из чисел +1, −1, 0 так, чтобы все суммы по строкам, по столбцам и по большим диагоналям были различны. Помогите Буратино.

Решение.

1) Допустим, что квадрат составлен. Тогда суммы чисел могут меняться в пределах от −6 до +6. Всего 13 значений («клетки»).

2) Найдем сумму числа строк, столбцов и больших диагоналей. Строк в квадрате 6, столбцов 6, диагоналей 2. Получаем 14 различных сумм («кролики»).

3) По принципу Дирихле найдутся по крайней мере две одинаковые суммы. Противоречие, значит составить такой квадрат невозможно. Следовательно, такой квадрат составить нельзя.

**Задачи для самостоятельного решения**

1. В магазин привезли 26 ящиков с яблоками трех сортов, причем в каждом ящике лежат яблоки одного какого-то сорта. Можно ли найти 9 ящиков с яблоками одного сорта?
2. В классе 27 учеников. Найдется ли месяц, в котором отмечают свои дни рождения не меньше, чем три ученика этого класса.
3. Дано 12 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать 2, разность которых делится на 11.
4. В ковре 4х4 метра моль проела 15 дырок. Докажите, что из него можно вырезать коврик размером 1х1 метр, не содержащий внутри себя дырок. (Дырки можно считать точечными).
5. На шахматной доске размером 8х8 Вася расставил 14 фигур. Докажите, что найдется квадрат размером 2х2, в котором не будет фигур. (Фигуры размещаются внутри клеток размером 1х1).
6. На собеседование пришли 65 школьников. Им предложили 3 контрольные работы. За каждую контрольную ставилась одна из оценок: 2, 3, 4 или 5. Верно ли, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки на всех контрольных?
7. В первенстве по хоккею участвуют 5 команд. Каждые две из них должны сыграть между собой один матч. Доказать, что в любой момент соревнований имеются две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.